Exercice N°1:

Cocher la bonne réponse:

1) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{|x-5|}$ est continue sur:

☐ $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

☐ $[5, +\infty[$

☒ $\mathbb{R}$

2) La fonction $g : x \mapsto \frac{10}{x^2+2}$ est majorée par:

☐ 0

☐ 1

☒ 5

3) $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si est seulement si

☐ $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

☐ $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$

☒ $\vec{u} \perp \vec{v}$

4) $AB = 3$; $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6$ alors

☐ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

☒ $A \in [BC]$

☐ $A \in (BC) \setminus [BC]$

Exercice N°2:

1) a) $D_f = [-2, +\infty[$

b) La courbe représente un saut au point d'abscisse 1, alors $(\mathscr{C}_f)$ n'est pas continue en ce point.

2)
- $f(I) = [-3, 5]$
- $f(J) = [-3, -1[\bigcup[0, 1]$
- $f(K) = [-3, 5]$

3) $f(x) = -1$, la droite $y = -1$ coupe $(\mathscr{C}_f)$ en un seul point. Donc $f(x) = -1$ admet une seule solution.

4) a) $\left.\begin{array}{l} f(-2) = 5 \\ f(0) = -3 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(-2) \times f(0) < 0$

f est strictement décroissante sur $[-2, 0]$.

D'apès T.V.I f admet une unique solution α dans $[-2, 0]$.

b) D'après le graphique $-1,3 < \alpha < -1.2$. $(-1.2 - (-1.3) = 0.1)$

5) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{10+3f(x)}}$ est définie sur $[-2, +\infty[$ ssi

$10 + 3f(x) > 0 \Longleftrightarrow f(x) > \frac{-10}{3} = -3.33$.

Or $f(x) > -3 > -3,33$ sur $[-2, +\infty[$.

D'où, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{10+3f(x)}}$ est définie sur $[-2, +\infty[$.

Exercice N°3:

1) a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-33x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(x+1)(x-4)} = \frac{\sqrt{x}-2}{(x+1)((\sqrt{x})^2-2^2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{(x+1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

D'où, $f(x) = \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{20}$

c) Pour que f soit continue en 4, il faut que $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$.

Par suite, $m = \frac{1}{20}$.

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{2}$

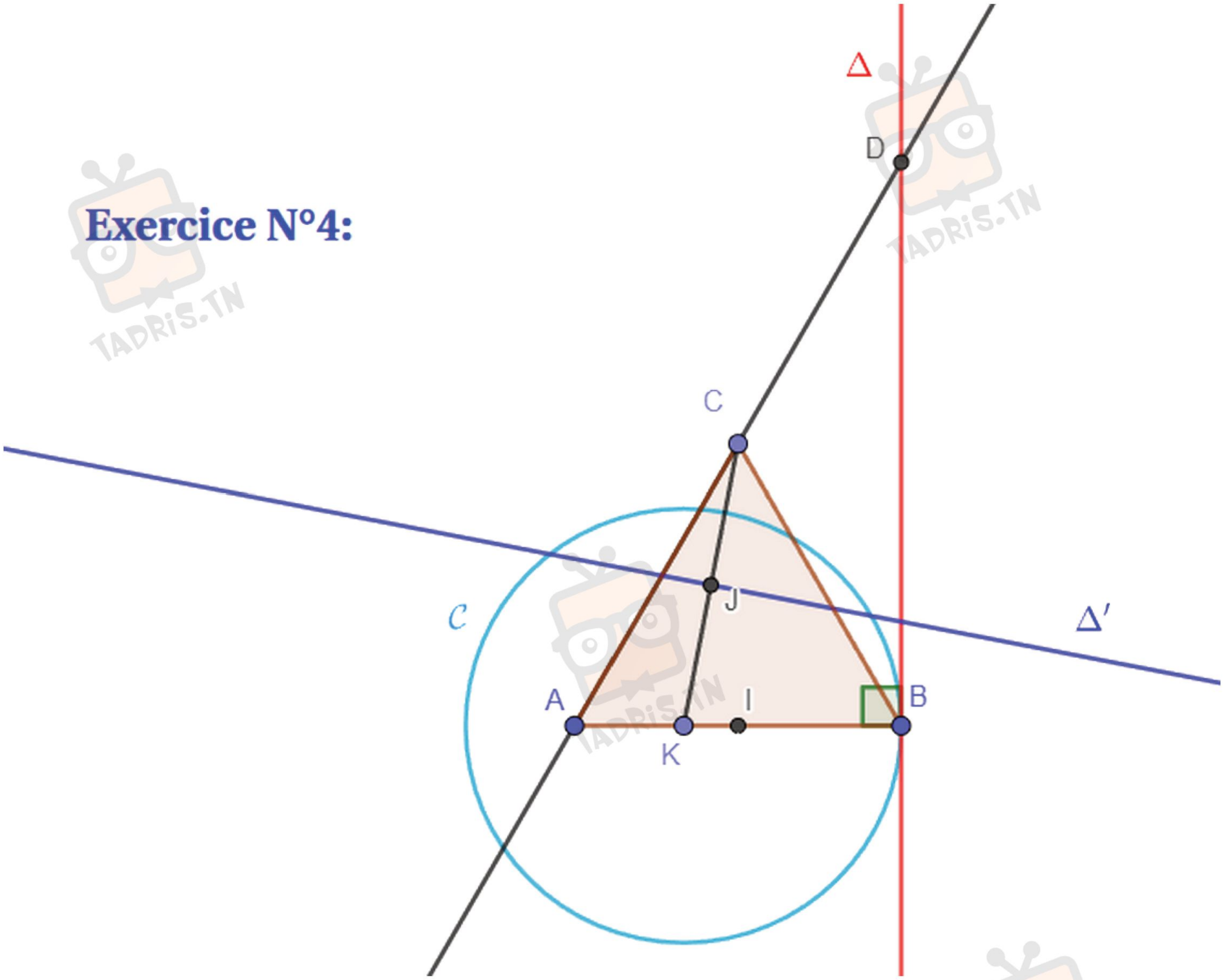
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \Longrightarrow$ f n'est pas continue en 0.

3) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{f(x)-2}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{(\sqrt{1-x}-2)\times(\sqrt{1-x}+2)}{(x+3)\times(\sqrt{1-x}+2)} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{1-x-4}{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)} =$

$\lim\limits_{x \to -3} \frac{-3-x}{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{-(3+x)}{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+2} = \frac{-1}{4}$

Exercice N°4:



1) a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Longrightarrow ||\overrightarrow{Ak}|| = \frac{1}{3}||\overrightarrow{AB}|| \Longrightarrow AK = 1$

$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \Longrightarrow ||\overrightarrow{Bk}|| = \frac{2}{3}||\overrightarrow{BA}|| \Longrightarrow BK = 2$

b) D'après la formule d'El-Kashi:

$CK^2 = BC^2 + BK^2 - 2BC.BK.cos(C\hat{B}K) = 9+4-2\times3\times2\times\frac{1}{2} = 7$

$CK = \sqrt{7}$

2) $\Delta = \{M \in P / MA^2 - MB^2 = 9\}$

a) $BA^2 - BB^2 = 3^2 = 9$

D'où, $B \in \Delta$.

b) $MA^2 - MB^2 = 9 \iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 9$

$\iff MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 - MI^2 - 2\overrightarrow{MI}\overrightarrow{IB} - IB^2 = 9$

$\iff 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 9$

$\iff 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 9$

$\iff \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = \frac{9}{2}$

On considère H le projethé orthogonale de M sur (AB)

$\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{BA} = \frac{9}{2} \iff HI.BA = \frac{9}{2} \iff HI = \frac{3}{2}$.

M appartient à la droite qui passe par H et perpendiculaire à la droite (AB).

Or $B \in \Delta$, ainsi M appartient à la droite perpendiculaire à (AB) en B.

c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{AB} = AB^2 + \underbrace{\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB}}_{0} = 9$

3) a) $f(M) = 2MA^2 + MB^2 = 2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA})^2 + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB})^2$

$f(M) = 2MK^2 + 4\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{KA} + 2KA^2 + MK^2 + 2\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{KB} + KB^2$

$f(M) = 3MK^2 + 2MK^2 + KB^2 = 3MK^2 + 2 + 4 = 3MK^2 + 6$

$g(M) = f(M) - 3MC^2 = 3MK^2 + 6 - 3MC^2$

$g(M) = 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JK})^2 - 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})^2 + 6$

$g(M) = 3MJ^2 + 6\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JK} + 3JK^2 - 3MJ^2 - 6\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JC} - 3JC^2 + 6$

$g(M) = 6\overrightarrow{MJ}.(\overrightarrow{JK} - \overrightarrow{JC}) + 6$

$g(M) = 6\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{CK} + 6$

$g(M) = 6\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{KC} + 6$

b) $\Delta' = \{M \in P / g(M) = 6\}$

$6\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{KC} + 6 = 6 \Longleftrightarrow 6\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{KC} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{JM}.\overrightarrow{KC} = 0$

Donc $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont orthogonaux.

Par suite, le point M appartient à la droite passant par J et perpendiculaire à (KC)

$\mathscr{C} = \{M \in P / f(M) = 18\}$

$3MK^2 + 6 = 18 \Longleftrightarrow MK^2 = 4 \Longleftrightarrow MK = 2$

M décrit le cercle de centre K et de rayon $r = 2$

c) $f(B) = 2BA^2 + BB^2 = 2 \times 3^2 = 18$

Ainsi $B \in \mathscr{C}$